Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalar- und Vektorfelder

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Wo begegnen uns Skalarfelder?

Wir betrachten das allgemeine Gasgesetz:

$$p = \frac{m \cdot R_s \cdot T}{V}$$

Aus Sicht der Mathematik ist, der Druck eine Funktion der beiden Variablen Temperatur und Volumen.

$$p(T, V) = \frac{m \cdot R_s \cdot T}{V}$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Wo begegnen uns Skalarfelder?

Wir interessieren uns für die Temperaturverteilung der Außenfassade eines Hauses, um zu überprüfen, ob das Haus ausreichend isoliert ist.



Quelle: Wikipedia

Wir haben eine Zuordnung:

$$(x, y) \mapsto T(x, y)$$
$$(x, y, z) \mapsto T(x, y, z)$$

Wenn sich die Temperatur über den Tag ändert, kommt die Zeit als zusätzliche Variable dazu…

$$(x, y, t) \mapsto T(x, y, t)$$
$$(x, y, z, t) \mapsto T(x, y, z, t)$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Definition von Skalarfeldern

Wir betrachten die Zuordnung aus mathematischer Sicht…

$$T: (x, y) \mapsto T(x, y) \qquad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$T: (x, y, t) \mapsto T(x, y, t) \qquad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Abbildungen, die einem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Zahl (Skalar) zuordnen, nennen wir Skalarfelder.



Der Funktionswert ist eine Zahl

Notationen:

Häufig wird in der Mathematik abgekürzt: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

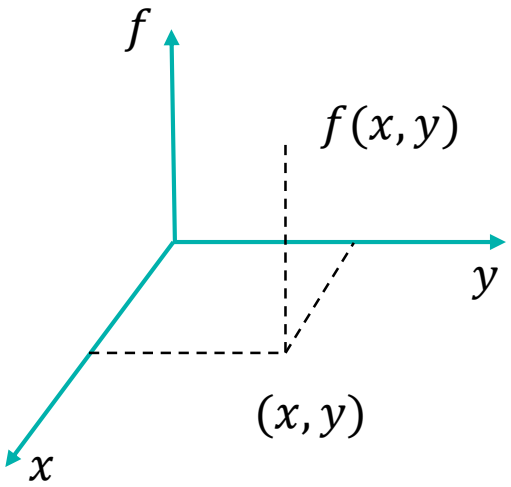
Skalarfelder

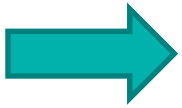
Darstellungsformen und Beispiele

Wir wollen die folgenden drei Skalarfelder zeichnen:

$$f(x,y) = 2x + y \qquad f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(x,y) = \sin x \cdot \cos y$$

Wie sehen diese Plots prinzipiell aus?





Funktionsgraph wird eine Fläche

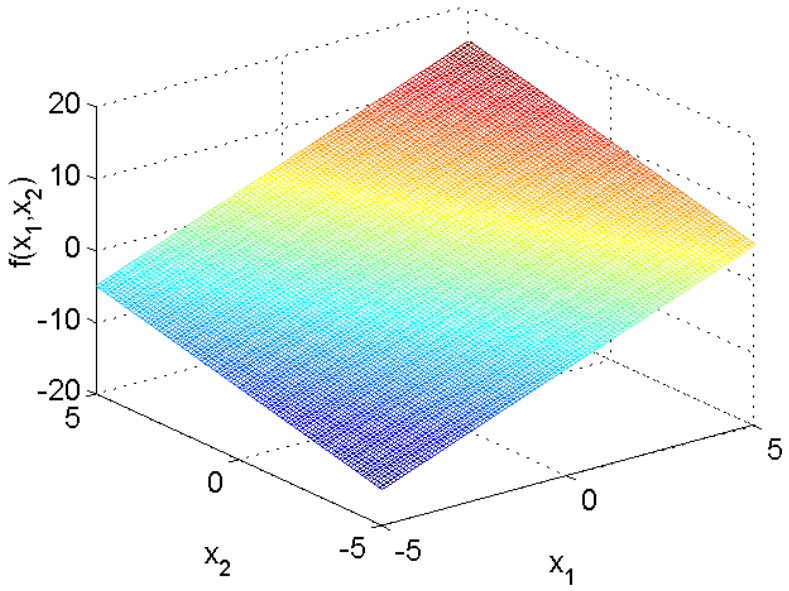
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Wir wollen die folgenden drei Skalarfelder zeichnen:

$$\boldsymbol{f(x,y) = 2x + y} \qquad f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(x,y) = \sin x \cdot \cos y$$



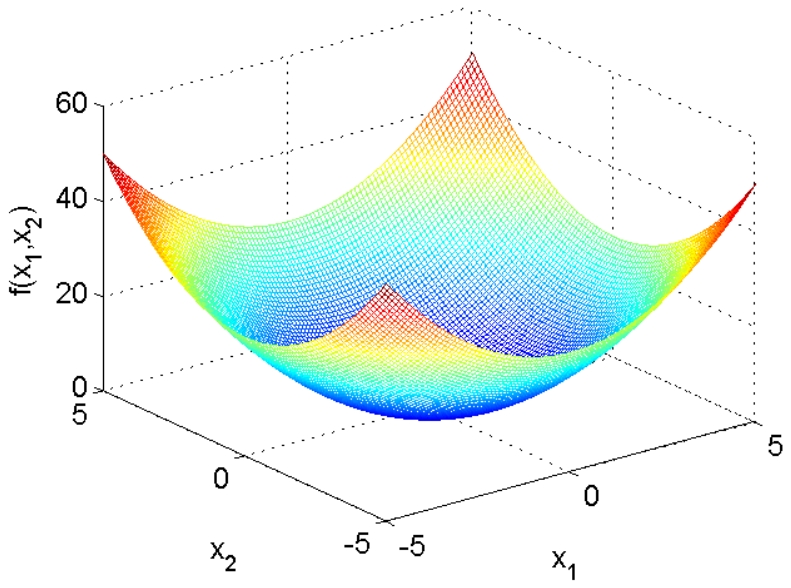
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Wir wollen die folgenden drei Skalarfelder zeichnen:

$$f(x,y) = 2x + y \qquad \boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2} \qquad f(x,y) = \sin x \cdot \cos y$$



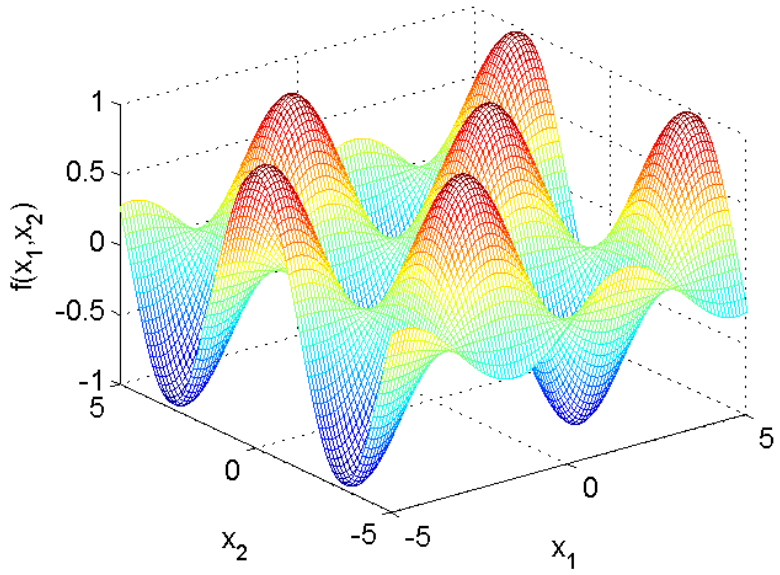
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Wir wollen die folgenden drei Skalarfelder zeichnen:

$$f(x,y) = 2x + y \qquad f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \boldsymbol{f(x,y) = \sin x \cdot \cos y}$$



Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Natürlich kann man auch Wertetabellen aufstellen…

$$f(x,y) = 2x + y$$

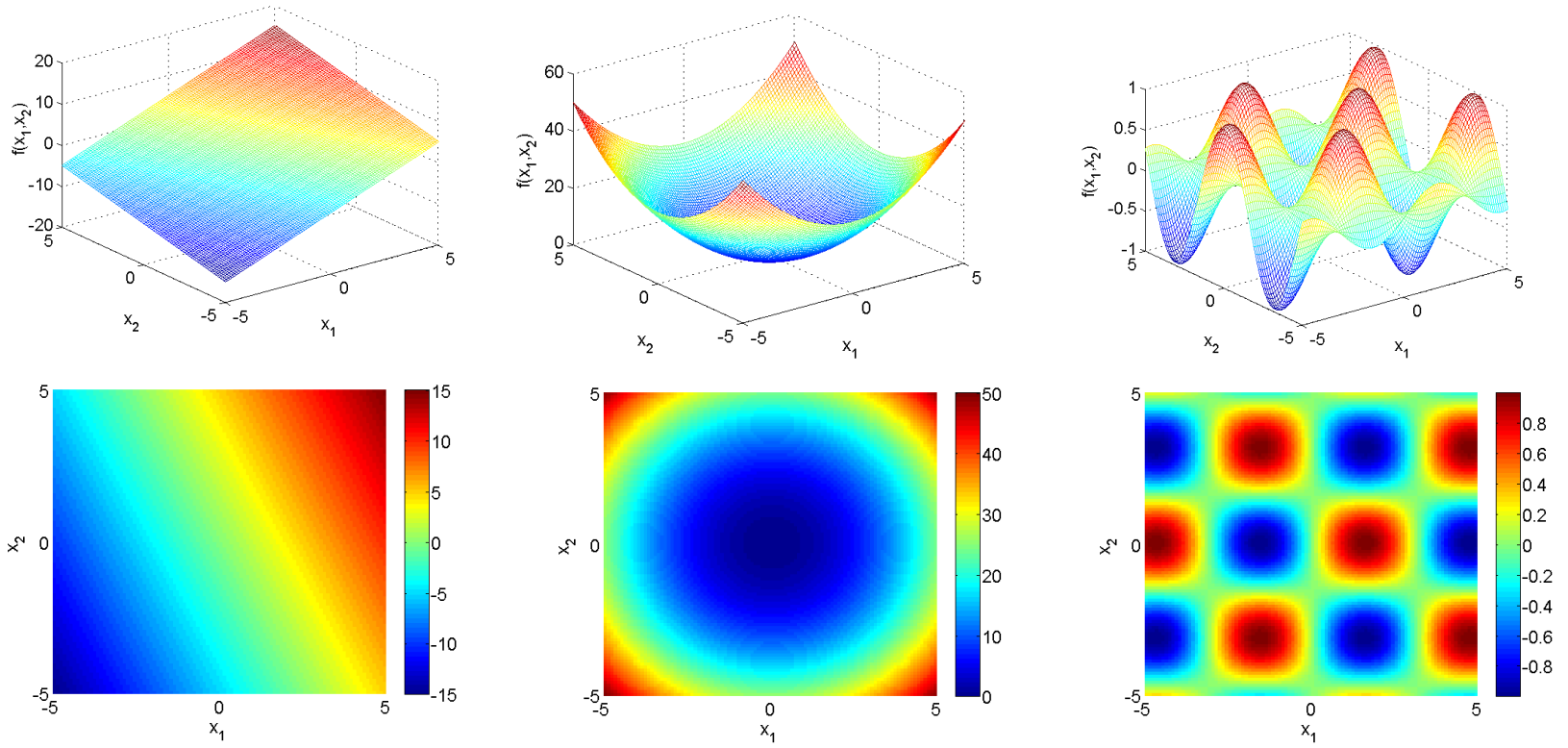
x	y	f(x,y)
-1	-1	-3
-1	-0,75	-2,75
-1	-0,5	-2,5
-1	-0,25	-2,25
-1	0	-2
-1	0,25	-1,75
-1	0,5	-1,5
-1	0,75	-1,25
-1	1	-1
-0,75	-1	-2,5
-0,75	-0,75	-2,25
-0,75	-0,5	-2
-0,75	-0,25	-1,75
-0,75	0	-1,5
-0,75	0,25	-1,25
-0,75	0,5	-1
-0,75	0,75	-0,75
-0,75	1	-0,5
-0,5	-1	-2
-0,5	-0,75	-1,75
-0,5	-0,5	-1,5
-0,5	-0,25	-1,25
-0,5	0	-1
-0,5	0,25	-0,75
-0,5	0,5	-0,5
-0,5	0,75	-0,25
-0,5	1	0

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Neben dieser 3D Darstellung können wir die Funktion auch „von oben“, d.h. als 2D Plot betrachten (wie beim Thermographie Bild)…

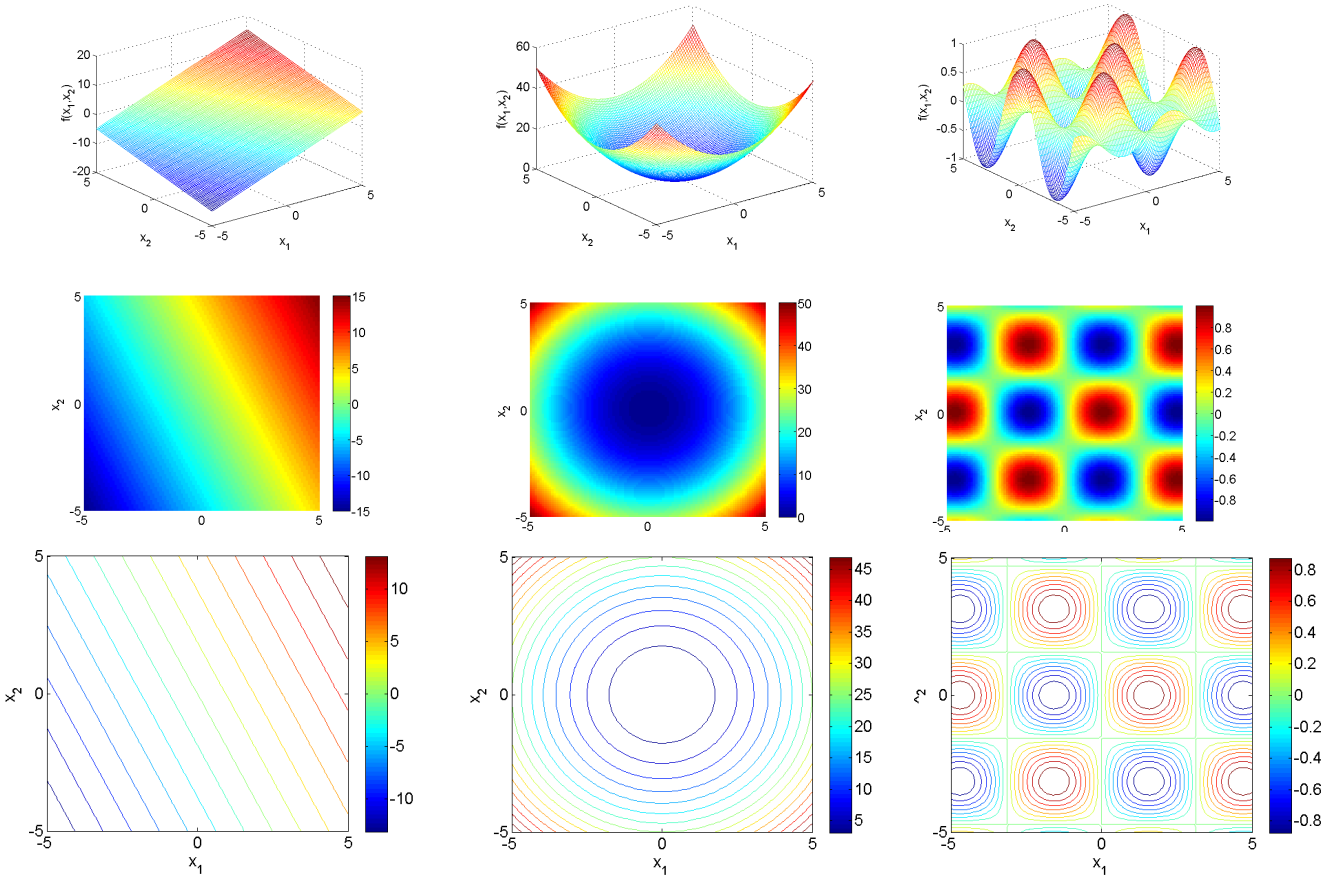


Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Als weitere Möglichkeiten für den 2D Plot können auch die Höhenlinien, d.h. die Konturen (Contour Lines) geplottet werden…



Punkte mit gleichem Funktionswert liege auch einer Höhenlinie

Physik:

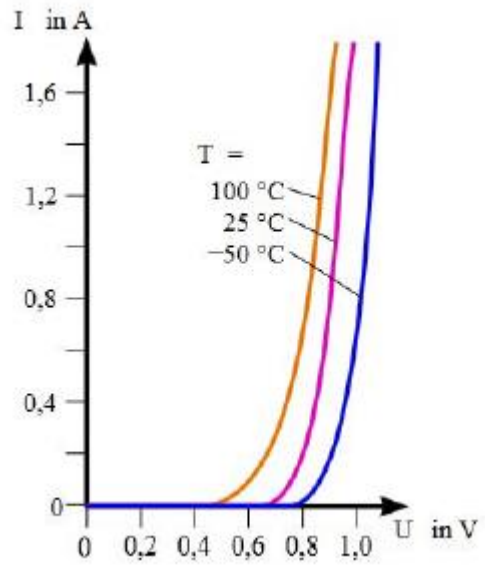
Isobaren, Isothermen…

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Wenn ein elektrisches Bauteil nicht nur von einer Größe abhängt, sondern von mehreren, erhalten ich Kennlinienfelder…



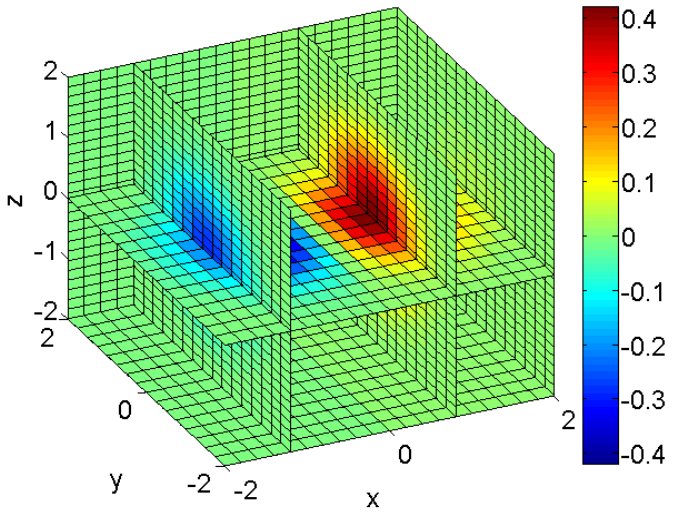
Mathematische Objekte: Funktionstypen

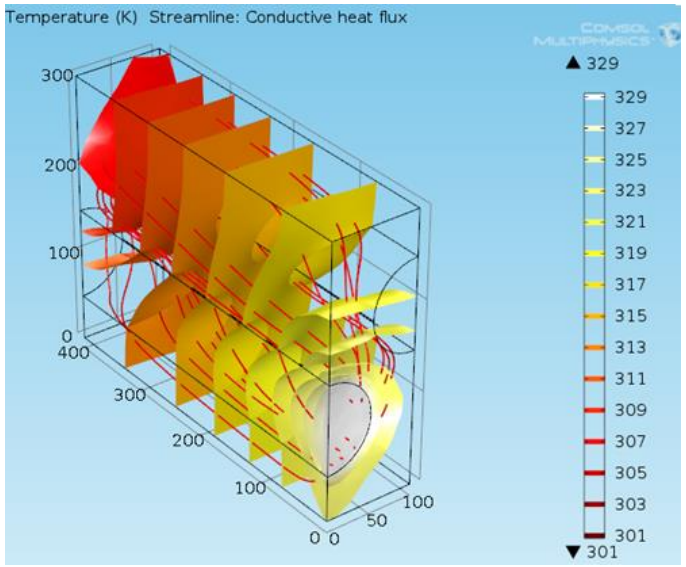
Skalarfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Was machen wir, wenn wir drei Koordinaten abbilden?

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$





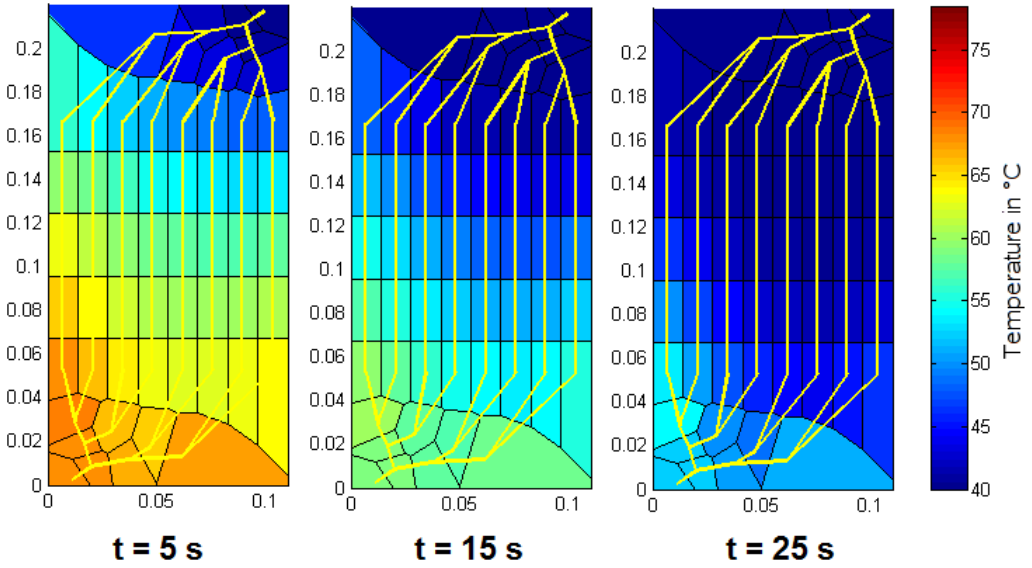
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Was machen wir, wenn wir drei Koordinaten abbilden?

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, (x, y, t) \mapsto f(x, y, t)$$



Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Wie kann ich Skalarfelder zeichnen?

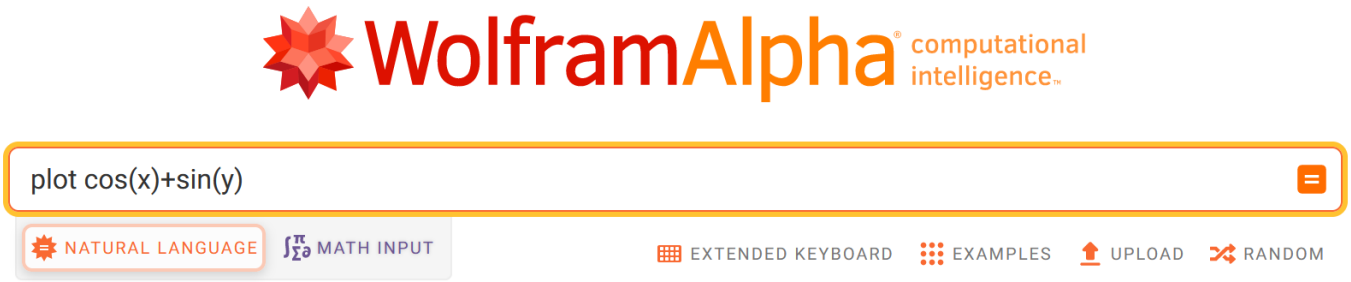
- Programme wie Matlab
- Wolfram Alpha

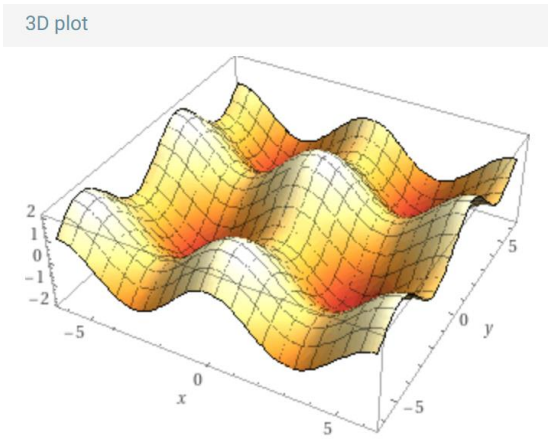
Mathematische Objekte: Funktionstypen

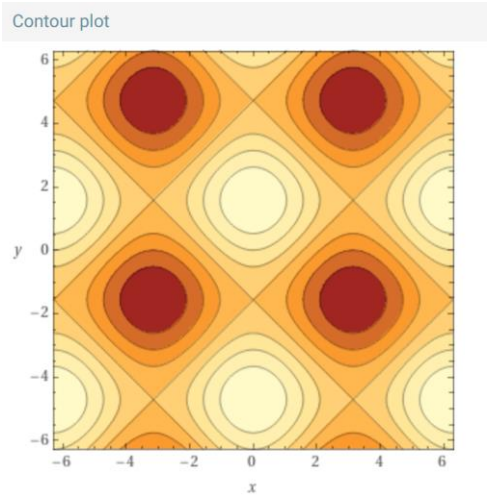
Skalarfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Wir zeichnen ein Skalarfeld mit Wolfram Alpha… $f(x,y) = \cos x + \sin y$







Mathematische Objekte: Funktionstypen

Skalarfelder

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Bestimmen und zeichnen Sie die Höhenlinien der folgenden Funktionen:

a) $z = 3x + 6y$

b) $z = x^2 + y^2$

c) $z = x^2 + y^2 - 2y$

Zeichnen Sie (z.B. mit dem Computer) die folgende Funktion:

$$u(x,t) = e^{-(x+ct)^2} + e^{-(x-ct)^2}$$

mit $c = 0.5$. Betrachten Sie hierbei die Zeit t als Parameter, d.h. zeichnen Sie für mehrere Werte, beginnend bei $t = 0$, eine 1D Funktion bzgl. der Ortsvariable x.

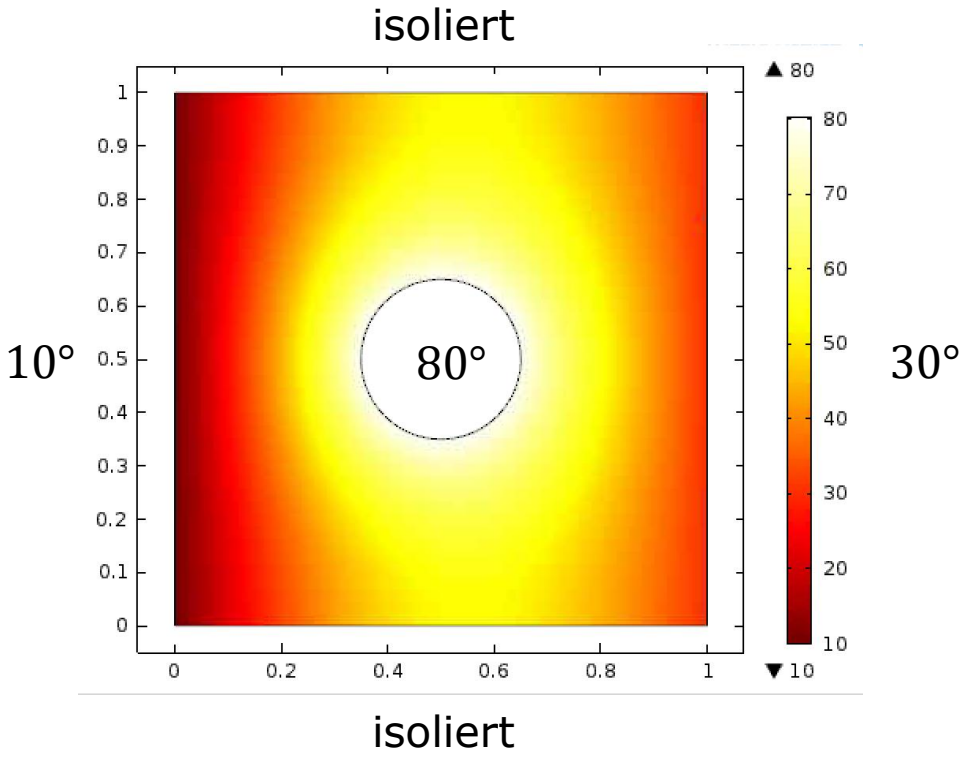
Die Funktion stellt eine Lösung der sogenannten Wellengleichung dar. In wie weit bestätigt ihr Plot dies, d.h. in wie weit verhält sich die Funktion wie eine Welle?

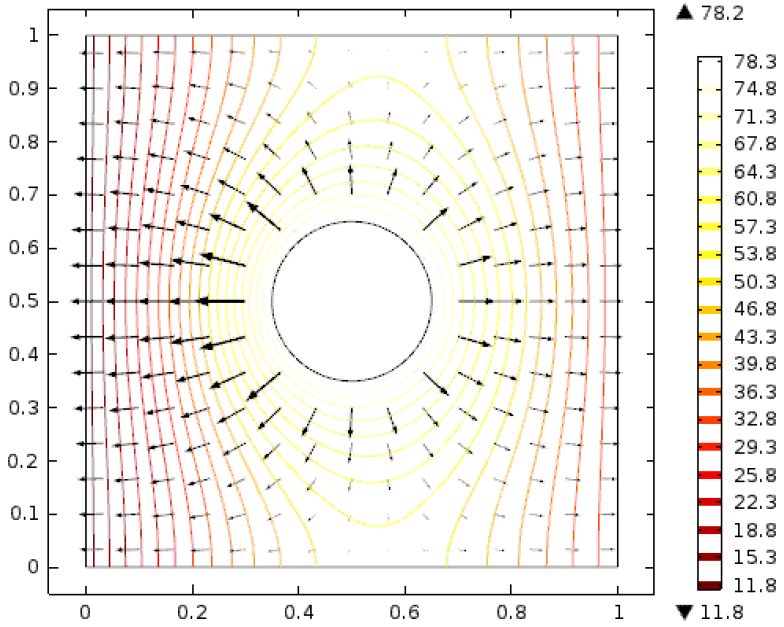
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Wo treten Vektorfelder auf?

Wir betrachten eine Temperaturverteilung…



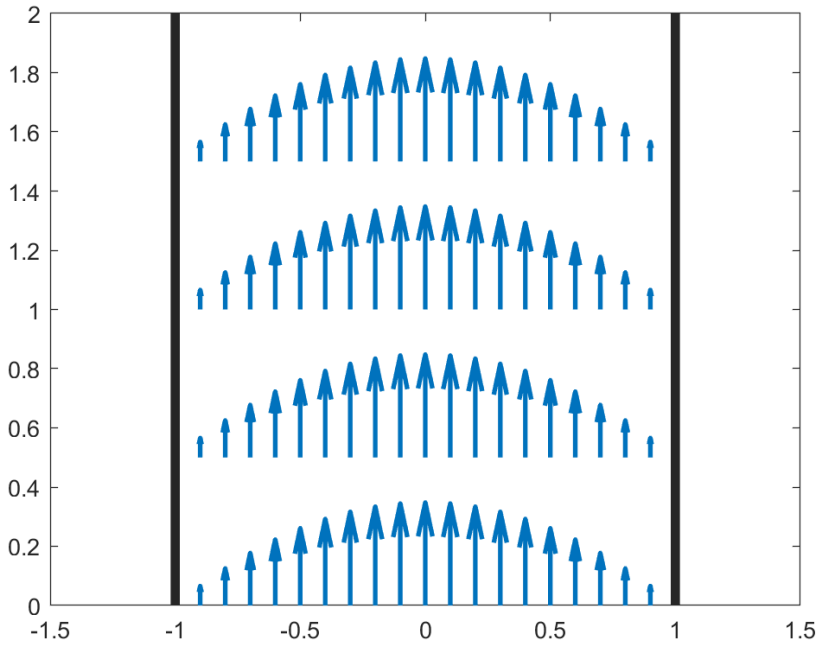


Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Wo treten Vektorfelder auf?

Wir betrachten die Strömung in einem Rohr…



Jedem Ort (x, y) wird die dort vorherrschende Strömungs-geschwindigkeit (v_x, v_y) zugeordnet.

$$\vec{v}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Definition von Vektorfeldern

Wir betrachten die Zuordnungen aus mathematischer Sicht…

$$\vec{\phi}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x,y) \mapsto \vec{\phi}(x,y) = \begin{pmatrix} \phi_x(x,y) \\ \phi_y(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x,y) \mapsto \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_x(x,y) \\ v_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Abbildungen, die einem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ einen Vekotor $\vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ zuordnen, nennen wir Vektorfelder.



Der Funktionswert ist ein Vektor

Notation:

Wir schreiben allgemein: $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Vektorfelder in der Geometrie

Auch in der Geometrie begegnen uns Vektorfelder…

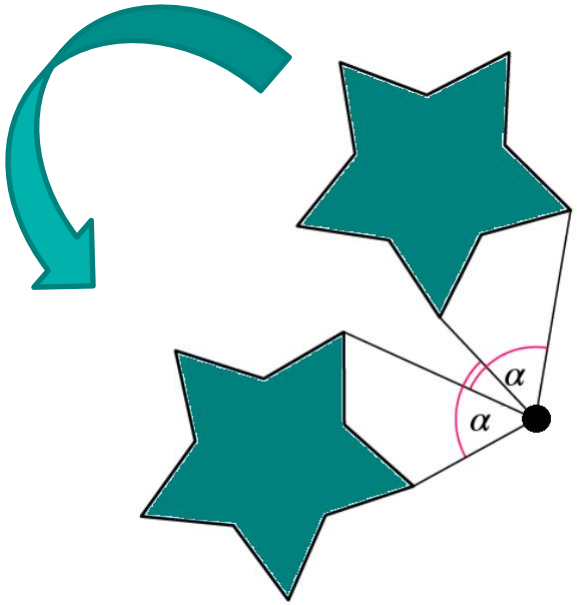


Abbildung (Vektorfeld):

$$f(\vec{x}) = \mathrm{D} \cdot \vec{x}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

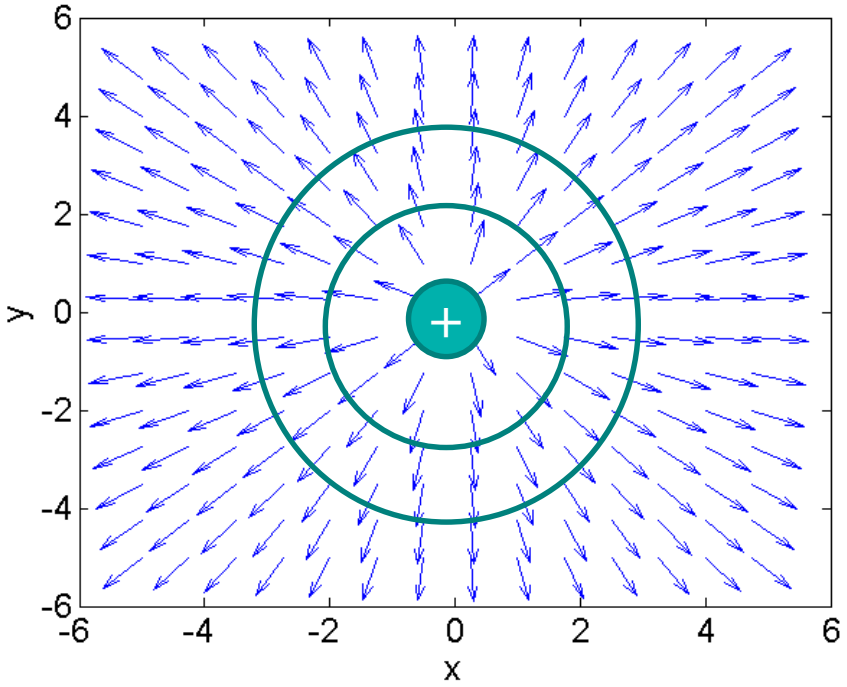
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Zweidimensionale Vektorfelder können mit Hilfe von Pfeilen dargestellt werden, wobei nur eine Auswahl der Vektorpfeile geplottet wird…

$$\vec{F}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



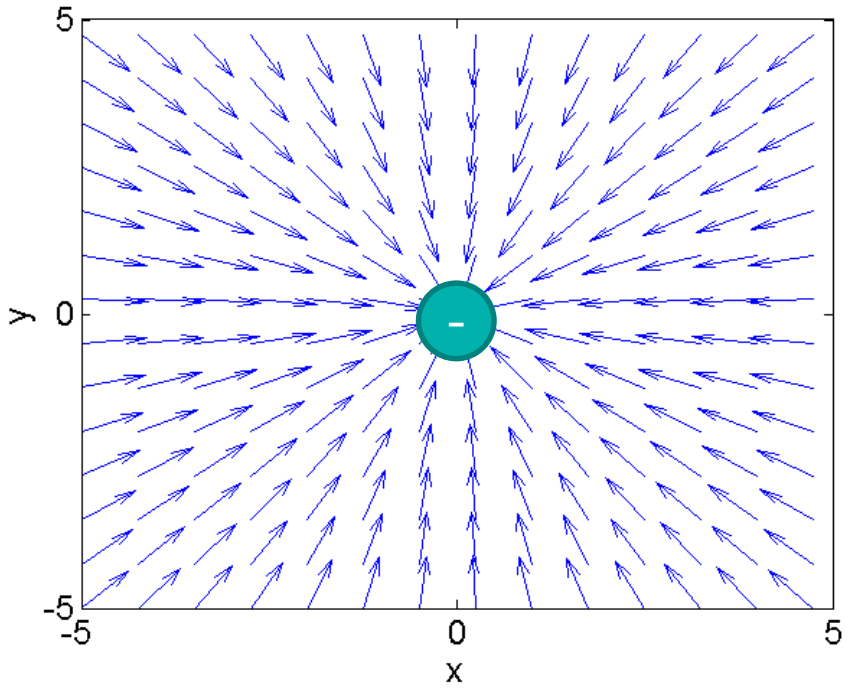
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Zweidimensionale Vektorfelder können mit Hilfe von Pfeilen dargestellt werden, wobei nur eine Auswahl der Vektorpfeile geplottet wird…

$$\vec{F}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$$



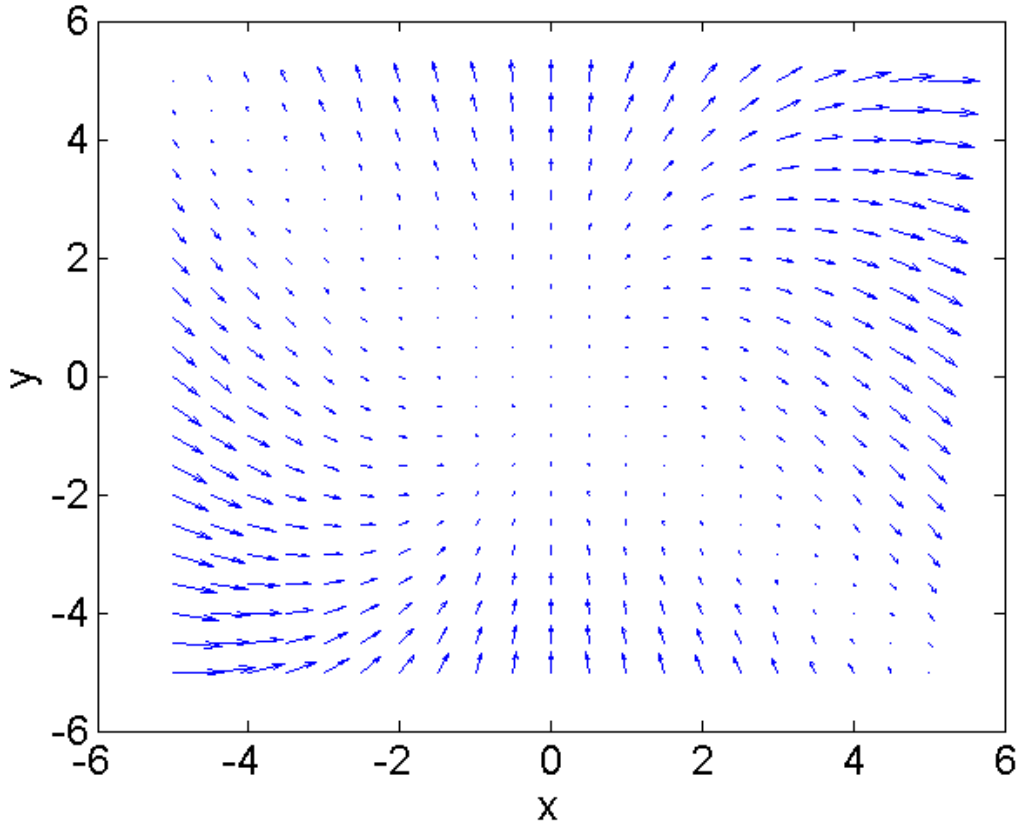
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Zweidimensionale Vektorfelder können mit Hilfe von Pfeilen dargestellt werden, wobei nur eine Auswahl der Vektorpfeile geplottet wird…

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + x \cdot y \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

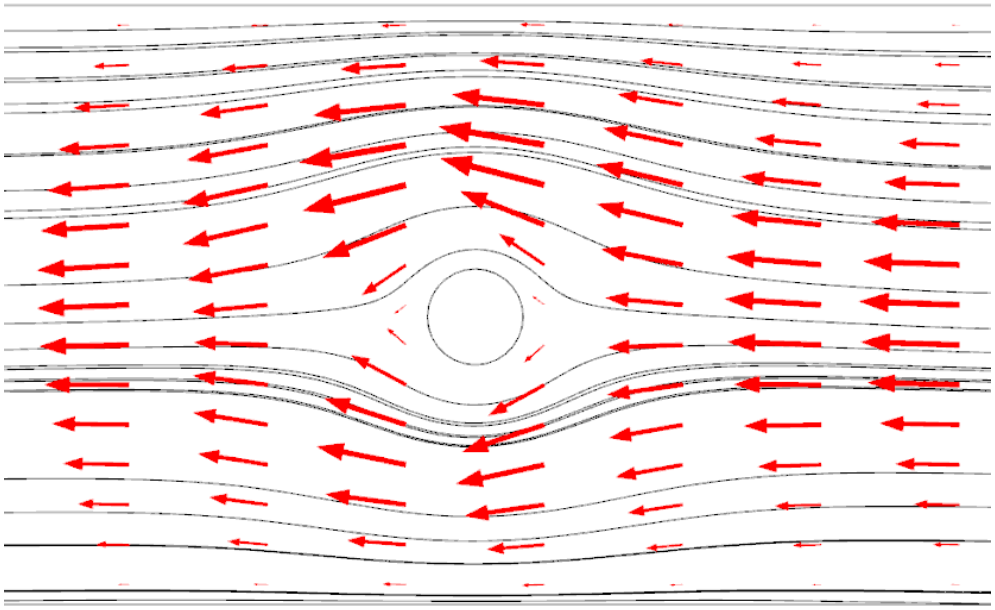


Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Wir betrachten noch einmal eine Rohrströmung (mit Hindernis)…



Die Geschwindigkeiten sind als Pfeile dargestellt…

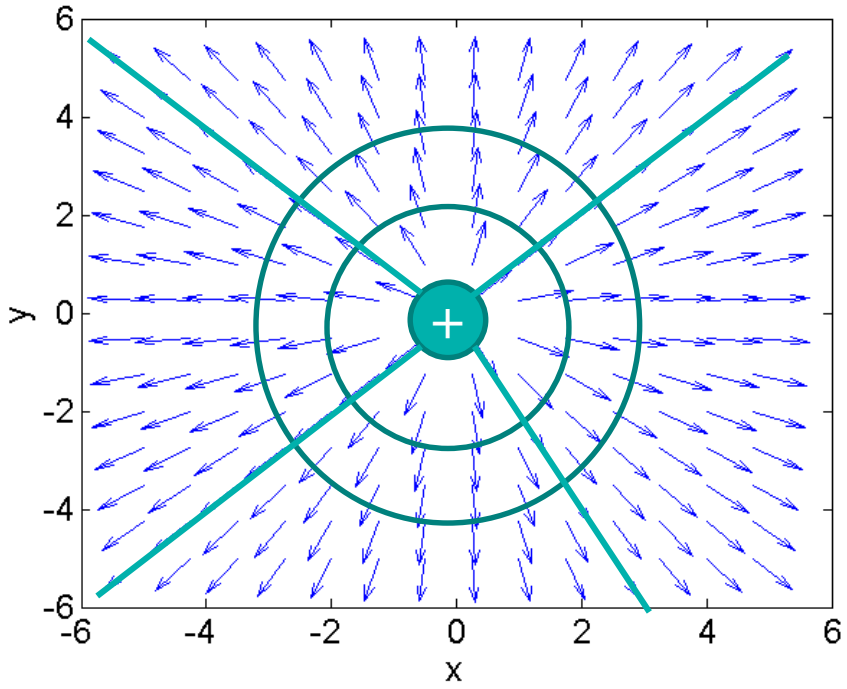
Zusätzlich sind Stromlinien eingezeichnet. Die Vektoren liegen tangential zu den Stromlinien…

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Darstellungsformen und Beispiele

Wir betrachten noch einmal das elektrische Feld, das durch eine positive Ladung hervorgerufen wird



In diesem Fall wird nicht von Stromlinien sondern von Feldlinien gesprochen

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Jetzt sind sie an der Reihe...

Wir betrachten das Magnetfeld, das von einem stromdurchflossenen, elektrischem Leiter, der sich auf der z-Achse durch den Ursprung befindet, gebildet wird. Wenn die Stromstärke I vorliegt und

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

den Abstand zum Ursprung bezeichnet, dann kann das Feld durch folgende Gleichung in der x-y-Ebene beschrieben werden:

$$\vec{B}(x, y) = \frac{I}{2\pi r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} .$$

Wir wollen das magnetische Feld qualitativ skizzieren und vernachlässigen dazu den Vorfaktor, d.h. wir betrachten:

$$\vec{B}'(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} .$$

Zeichnen Sie an verschiedenen Punkten (z.B. $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, \pm 1)$) das Vektorfeld in ein Koordinatensystem.

Wie denken sie, sehen die zugehörigen Feldlinien aus?

Wie läuft der Strom, aus der Bildebene hinaus oder hinein?

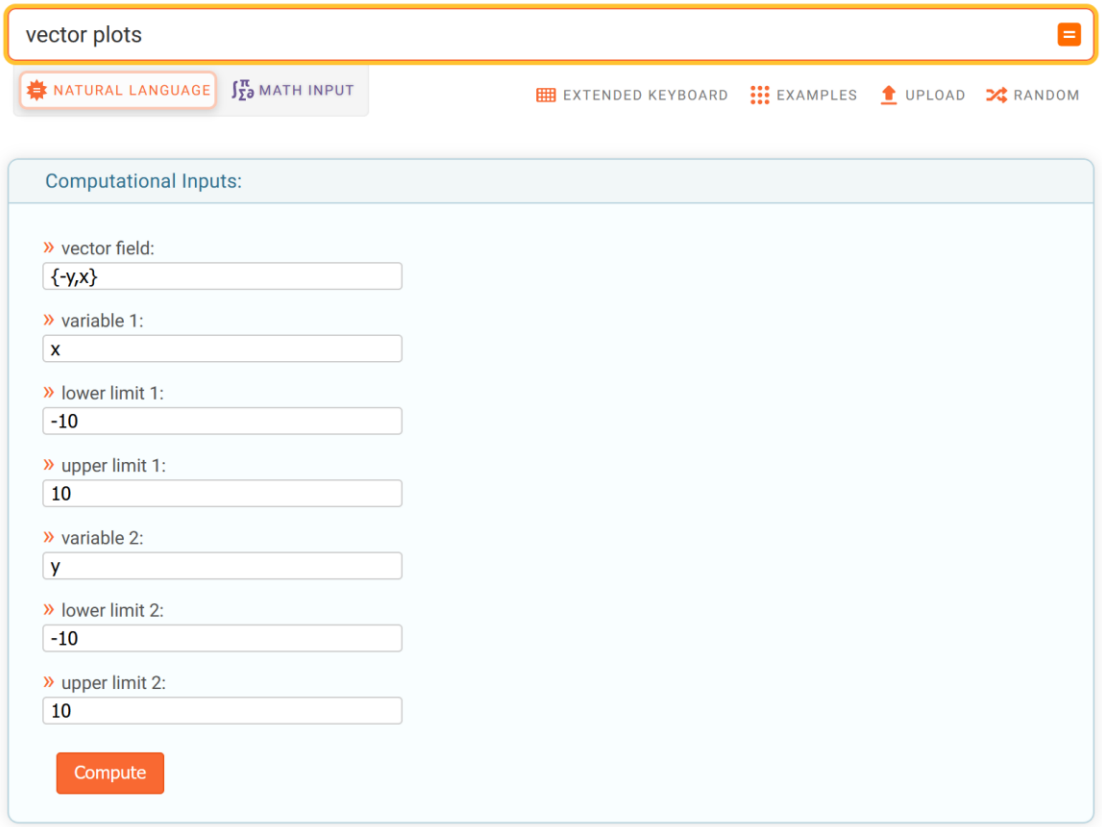
FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Jetzt sind sie an der Reihe…

Bei Wolfram Alpha:



Mathematische Objekte: Funktionstypen

Vektorfelder

Jetzt sind sie an der Reihe…

Wie sehen die Feldlinien zu den folgenden Vektorfeldern aus?

